数理解析研究所講究録
第887巻 1994年 169-179

リー環の表現のテンソル積の分解から生じるランダムウォークについて

岡山大学教養部　　洞　彰人　(Akihito Hora)

Excuse 量子ランダムウォークの興味ある例として標題のものを導きだし, その後 dominant weights の上を動きまわるこのランダムウォークの姿を調べる ... 予定であったのであるが, 講演では量子ランダムウォークの説明に時間がかかってしまって, 標題のランダムウォークの具体的な性質にまで及ばなかった. そこで, この報告も量子ランダムウォークの導入と標題の例を導くのにとどめることにする. Dominant weights 上のランダムウォークの確率論的な性質については, もう少し内容を整理拡充した上で別の機会に述べることにしたい. したがって, 講演題目と内容とがピッタリせず, おおむね Biane や Parthasarathy の結果の一部を双代数の言葉を用いて焼き直すのにとどまってしまったが, 御容赦下さい.

§1. Introduction

複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現全体を $\{V_\lambda\}$ とし, これらのテンソル積を既約分解する:

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu N_{\lambda\mu\nu} V_\nu \, . \tag{1.1}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ のときのこの分解の仕方を記述するのが Littlewood - Richardson 則である. (1.1) は V_λ に V_μ をぶつけた（相互作用させた）ときの分岐の仕方を表すものとみなすと, 何かランダムウォークのようなものが見えてくる. 本稿では"ランダムウォーク"という術語に少しこだわりを持ってみて, どうして (1.1) が何らかのランダムウォークを表していると言えるのかを考えていく.

一般に, ランダムウォークというのは 1 ステップごとに同種の独立なランダム運動を加えあわせたもの, すなわち独立同分布な確率変数の列 $\{X_n\}$ の和や積

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n \text{ or } X_1 X_2 \cdots X_n \text{ or } X_n \cdots X_2 X_1 \tag{1.2}$$

のことである．したがって，X_nは群や半群Gに値をとる確率変数でなければならない．しかし，例えばランダムウォークの分布の性質に興味がある場合，重要なのはS_nのとる値そのものではなくて，

$$f \longmapsto f(S_n) \qquad (f\text{は}G\text{上の可測関数}) \tag{1.3}$$

という写像が十分多くのfに対してわかることである．Gの積はG上の関数の余積 $\Delta: f \mapsto \Delta f(x,y) = f(xy)$ に移る．こうして，可測構造を記述するG上の関数のなす代数にランダムウォークを動かすためのGの積を記述する余代数の構造を加えた双代数が表に現れる．さらに，関数環ではなくて非可換代数によって可測構造を記述することも考えられ，このあたりの事情は量子確率論の枠組みを用いて定式化される．

Introduction はこれくらいにして，以下次の順序で論を進めていく．

- 量子確率変数と量子マルコフ連鎖の（粗雑な）review
- 双代数による量子ランダムウォークの定義と性質
- リー環の表現のテンソル積の分解

尚，双代数についても作用素環についてもごく表面的な事柄しか使わない．

§2. 量子マルコフ連鎖

本§の量子マルコフ連鎖の定義と記号は[P2]による．量子確率論のまとまった教科書としては，この他に[M]がある．

量子確率変数 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ を確率空間，$(S, \mathfrak{F})$ を可測空間，XをΩからSへの可測写像，すなわちS値確率変数とする．Ω, S上の$\mathbb{C}$値可測関数全体をそれぞれ$\mathcal{F}(\Omega), \mathcal{F}(S)$と書く．§1で述べたように，$X$は$\mathcal{F}(S)$から$\mathcal{F}(\Omega)$への写像:

$$\mathcal{F}(S) \ni f \longmapsto f \circ X \in \mathcal{F}(\Omega) \tag{2.1}$$

を引き起こす．(2.1) は$*$-代数の間の準同型 ($*$-algebra homomorphism) である．ただし，$\mathcal{F}(S), \mathcal{F}(\Omega)$ には複素共役で$*$を定める: $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Pは$\mathcal{F}(\Omega)$上の状態 (i.e. 規格化さ

れた正値線型汎関数) を与える. (2.1) に鑑みて, 一般に $*$-代数 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}$上の状態ρが与えられたとき,

$$\xi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad * \text{-algebra homomorphism} \tag{2.2}$$

を$\mathcal{B}$上の $\mathcal{A}$ 値（量子）確率変数と呼ぶ. $\mathcal{A}$ が可換の場合には, $\mathcal{A}$ を何らかの集合の上の関数環とみなせるので, 通常の（古典的な）状況になる. $\mathcal{B}$はヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界線型作用素全体のなすフォンノイマン代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ で, ρはその上の正規状態にとることが多い. 確率変数ξの分布は

$$\mathcal{A} \ni a \longmapsto \rho(\xi(a)) \in \mathbb{C} \tag{2.3}$$

で与えられる $\mathcal{A}'$の元（とくに正値）である.

<u>例</u>　$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の自己共役な元は, スペクトル分解を考えることにより, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上の $\mathbb{R}$ 値確率変数になる.

<u>条件つき平均</u>　$\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ をヒルベルト空間, ρを $\mathcal{H}_2$上のトレースクラスの線型作用素 (i.e. $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_2)$ 上の正規状態) とする. ρに関する条件つき平均 $E_\rho : \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1)$ を

$$\langle u, E_\rho v\rangle = \mathrm{tr}\, X|v\rangle\langle u| \otimes \rho \ , \qquad u,v \in \mathcal{H}_1,\ X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \tag{2.4}$$

によって定義する. ただし, $|v\rangle\langle u|$ は $w \mapsto \langle u,w\rangle v$ というランク 1 の作用素である.

(注) (2.4) の左辺を $\mathrm{tr}\,(E_\rho X \otimes 1)(|v\rangle\langle u| \otimes \rho)$ と書き直すと, 古典的な場合:

$$\int E[X|\mathfrak{F}]1_A dP = \int X1_A dP \ , \qquad A \in \mathfrak{F}$$

と見比べやすい.

E_ρに関して次が成り立つ ([P2]§16,§18 参照).

$$E_\rho 1 = 1 \ , \quad E_\rho X^* = (E_\rho X)^* \tag{2.5}$$

$$E_\rho(A \otimes 1)X(B \otimes 1) = A(E_\rho X)B \ , \qquad A,B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1),\ X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \tag{2.6}$$

$\mathcal{B}_i \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_i)$, $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ をすべてフォンノイマン代数とすると,

$$X \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \implies E_\rho X \in \mathcal{B}_1 \ . \tag{2.7}$$

量子マルコフ連鎖 ([P2]§18 参照)　簡単のため, 有限時刻 $N \in \mathbf{N}$ までのマルコフ連鎖のみを考えることにする. $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}$ をヒルベルト空間, $\mathcal{B}_0 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$ をフォンノイマン代数, ρ_0, ρ をそれぞれ $\mathcal{B}_0, \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上の正規状態とする. 次のような記号を導入する.

- $\mathcal{H}_{[1,n]} = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$ (n 個)　i.e. $\mathcal{H}^{\otimes N}$の最初の n 個のテンソル積
- $1_{[n+1,N]} = 1 \otimes \cdots \otimes 1$ ($N-n$ 個) on $\mathcal{H}_{[n+1,N]}$
- $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{[1,N]})$
- $\mathcal{B}_{n]} = \{X \otimes 1_{[n+1,N]};\ X \in \mathcal{B}_0 \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{[1,n]})\}$
- $E_{n]} = E_{\rho^{\otimes N-n}} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_0 \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{[1,n]})$

$(\mathcal{B}, \rho_0 \otimes \rho^{\otimes N})$ が量子確率空間, $\mathcal{B}_0$がマルコフ連鎖のとる値の空間を表す. 今,

$$\theta : \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_0 \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \quad *\text{-algebra homomorphism} \tag{2.8}$$

が与えられたとする. このθが 1 ステップの推移の仕方を決める写像である. $\mathcal{H}$の正規直交基底 $\{e_i\}$ を固定し,

$$\theta^i_j X = E_{|e_j\rangle\langle e_i|}\theta(X) \ , \qquad X \in \mathcal{B}_0 \tag{2.9}$$

とおく. $j_n : \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_{n]}$ を次式で帰納的に定義する.

2.10. 定義

$$j_0 X = X \otimes 1_{[1,N]} \ , \quad j_1 X = \theta(X) \otimes 1_{[2,N]} \ ,$$
$$j_n X = \sum_{i,k} j_{n-1}(\theta^i_k X) 1 \otimes 1_{[1,n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_k| \otimes 1_{[n+1,N]} \ .$$

この $\{j_n\}$ をθが引き起こす量子マルコフ連鎖と呼ぶ.

(注) $u, u' \in \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{[1,n-1]}$, $v, v' \in \mathcal{H}_n$ に対して

$$\langle u \otimes v, (j_n X)(u' \otimes v')\rangle = \langle u, (j_{n-1} E_{|v'\rangle\langle v|}\theta(X))u'\rangle$$

(ただし, j_nXを自然に $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{[1,n]}$ 上の作用素とみて) が成り立つので, j_nの定義は $\mathcal{H}$の正規直交基底のとり方にはよらない.

2.11. 命題 $$E_{n-1]}j_nX = j_{n-1}(E_\rho\theta(X))\ , \qquad X \in \mathcal{B}_0$$

証明は略. [P2]§18 参照.

古典的な場合との比較 $\{M_n\}$ を S上のマルコフ連鎖, $T:\mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$ をその推移作用素とする. $\mathfrak{F}_n = \sigma[M_0, M_1, \cdots, M_n]$ に関する条件つき平均を $E_{n]}$ と書くことにすれば,

(2.12) $$E_{n-1]}f(M_n) = (Tf)(M_{n-1})\ , \qquad f \in \mathcal{F}(S)$$

が成り立つ. (2.1) と (2.2) の対応を見れば, $f(M_n)$ は j_nfに, $(Tf)(M_{n-1})$ は $j_{n-1}(Tf)$ に当たる. したがって, (2.11) と (2.12) とを見比べて次の定義をおく.

2.13. 定義 (2.10) の量子マルコフ連鎖 $\{j_n\}$ に対して, $E_\rho\theta : \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_0$ を $\{j_n\}$ の推移作用素と呼ぶ.

§3. 双代数と量子ランダムウォーク

§1 で述べたように, 量子確率論の考え方にのっとれば, 群や半群に値をとるランダムウォークから自然に双代数上のランダムウォークに導かれる. 繰り返すと, 代数でもって可測構造を記述し, 余代数でもって運動を引き起こすのである. 以下 $\mathbb{C}$ 上の双代数のみを考え, 余積と余単位射をそれぞれ Δ, ε で表す. 定義等は[A]を参照. 今後登場する例は次の 3 つである.

3.1. 例 Gをコンパクト群, $\mathcal{W}$を G の群フォンノイマン代数 (i.e. G の左正則表現 L で生成される) とする. $\Delta L_g = L_g \otimes L_g$, $\varepsilon(L_g) = 1\,(g \in G)$ によって $\mathcal{W}$は余可換双代数になる.

3.2. 例 Gをコンパクト群, $\mathcal{R}$ を G の表現関数 (i.e. 有限次元 $\mathbb{C}G$ 加群を生成するなめらかな関数) 全体とする. $\Delta f(x,y) = f(xy)$, $\varepsilon(f) = f(e)\,(f \in \mathcal{R}, e$ は G の単位元) によって $\mathcal{R}$ は可換双代数になる.

3.3. 例 $\mathfrak{g}$を複素リー環, $\mathcal{U}$を $\mathfrak{g}$ の包絡代数とする. $\Delta X = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \varepsilon(X) = 0 (X \in \mathfrak{g})$ によって$\mathcal{U}$は余可換双代数になる.

(注) 例 3.1–3.3 はいずれもホップ代数であるが, 本稿では双代数 (あるいは$*$-双代数) の構造しか用いない. もちろん, 量子確率論で対合射を用いないと言うわけではない.

量子ランダムウォーク　$\mathcal{A}$を$*$-双代数で $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に含まれているものとする. 余積Δを

$$\Delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

と見て, (2.8) のθとしてこのΔをとったもの, すなわちΔが引き起こす量子マルコフ連鎖を $\mathcal{A}$ 値量子ランダムウォークと呼ぶことにしよう.

(注) $\mathcal{A}$ はフォンノイマンとは限らないので (2.7) とは状況が違うおそれがあるが, 例 3.2 や 3.3 の場合は, $\Delta X \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ (代数的テンソル積) だからその条件つき平均が $\mathcal{A}$ にはいる. また, 例 3.3 の場合は $\mathcal{U} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ という要請も緩める. したがって上の一般的な定義に該当しなくなるが, その都度適当に処理する.

$\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_n = (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \Delta)\Delta_{n-1}$ (1 は $n-1$ 個) によって帰納的にΔ_nを定める. $\mathcal{A}$ 値量子ランダムウォーク $\{j_n\}$ は

$$j_n = \Delta_n \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.5}$$

にほかならない. 量子ランダムウォーク $\{\Delta_n\}$ の分布は

3.6. 命題　　Δ_nの分布 $= \rho_0 \star \rho \star \cdots \star \rho$　　(ρがn個)

である. ただし, ρ_0, ρ は $\mathcal{A}$ 上の状態で, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{A}'$ に対してその合成積 $\star$ は

$$\langle \psi_1 \star \psi_2, X \rangle = \langle \psi_1 \otimes \psi_2, \Delta X \rangle , \qquad X \in \mathcal{A} \tag{3.7}$$

で定義される.

古典的な場合との比較　Gをコンパクト群, μをG上の絶対連続確率測度とし, 規格化されたハール測度に関するμの密度をϕとおく. μが生成するG上の右ランダムウォーク (i.e. $\{X_0X_1\cdots X_n\}$, 各$X_k(k=1,2,\cdots)$ の分布がμ) の推移作用素Tは

$$(3.8)\qquad (Tf)(x)=\int_G f(y)\mu(x^{-1}dy)=\int_G f(xy)\mu(dy)=f\star\check{\phi}(x)$$

である. ただし, $\check{\phi}(x)=\phi(x^{-1})$.

3.9. 定理　このG上の右ランダムウォークは$\mathcal{A}=\mathcal{R}\subset\mathfrak{B}(L^2(G))$ ($\mathcal{R}$の元はかけ算作用素として$L^2(G)$に作用させる), $\rho=|\sqrt{\phi}\rangle\langle\sqrt{\phi}|$ によって量子ランダムウォークとみなせる. すなわち, 量子ランダムウォークの意味の (2.13) の推移作用素$E_\rho\Delta$ が (3.8) のTに一致する.

(証明)　$u,v\in L^2(G)$, $f\in\mathcal{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle u,(E_\rho\Delta f)v\rangle&=\mathrm{tr}\,\Delta f|v\otimes\sqrt{\phi}\rangle\langle u\otimes\sqrt{\phi}|=\langle u\otimes\sqrt{\phi},\Delta f v\otimes\sqrt{\phi}\rangle\\&=\iint_{G\times G}\overline{u(x)}f(xy)\phi(y)v(x)dxdy=\langle u,(f\star\check{\phi})v\rangle\qquad\text{(証明終)}\end{aligned}$$

$\mathcal{A}$が非可換の場合, $\mathcal{A}$値量子ランダムウォークと言っても宙を飛んでいるような感じで, 何となくつかみどころがない. しかし, $\mathcal{A}$値量子ランダムウォーク$\{j_n\}$を作った上でj_nを$\mathcal{A}$の適当な可換部分代数$\mathcal{A}_1$に制限すれば, $\mathcal{A}_1$を何らかの関数環とみなして, (ちょうど地面に足跡がつくように) その土台の上を動きまわるランダムウォークを見ることができる. リー環の表現のテンソル積の既約分解から生じる“ランダムウォーク”も, そのようにして量子ランダムウォークの足跡として実現することができる ([B1,2], [P1,2]). 可換部分代数への制限という操作によって, 古典的な確率過程が量子確率過程の中に占める位置を明らかにすることは, 量子確率論の一つの基本的な問題であろう.

§4. リー環の表現のテンソル積の既約分解と量子ランダムウォーク

$\mathfrak{g}$を複素半単純リー環, $\{V_\lambda\}$を$\mathfrak{g}$の有限次元既約表現（の同値類）全体とし, それらのテンソル積を既約分解する:

$$(4.1)\qquad V_\lambda\otimes V_\mu=\bigoplus_\nu N_{\lambda\mu\nu}V_\nu\ .$$

$X \in \mathfrak{g}$ は $X \otimes 1 + 1 \otimes X$ によって $V_\lambda \otimes V_\mu$ に作用するので, $\mathcal{U}$値ランダムウォーク ($\mathcal{U}$は $\mathfrak{g}$ の包絡代数 (例 3.3)) を考えるのが自然であろう.

$\mathcal{L} = \oplus_\lambda V_\lambda$ とおき, $\mathcal{U}$の元を$\mathcal{L}$上の (非有界) 作用素とみなす. $\sigma_\lambda : \mathcal{L} \longrightarrow V_\lambda$ を射影とし, $\tau_\lambda = (\dim\lambda)^{-1}\sigma_\lambda$ とおく. ただし, $\dim V_\lambda$ を $\dim\lambda$ と略記した. $\operatorname{tr} X\tau_\lambda$ $(X \in \mathcal{U})$ によって, τ_λを$\mathcal{U}$の状態のようなものと思う. 簡単のため, λ, μ を固定し, V_λに V_μを次々とぶつけよう (後にもう少し一般化する). 余積 $\Delta : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ と $\tau_\lambda \otimes \tau_\mu \otimes \tau_\mu \otimes \cdots$ が引き起こす$\mathcal{U}$値ランダムウォーク $\{\Delta_n\}$ を考える. $\mathcal{U}$の中心を $\mathfrak{Z}$ とし, $\{\Delta_n\}$ を $\mathfrak{Z}$ に制限しよう. $Z \in \mathfrak{Z}$ は各 V_λ上スカラーで作用するので, Zを表現たちの上の関数とみなせる ($\lambda(Z_1Z_2) = \lambda(Z_1)\lambda(Z_2)$ に注意). したがって $\{\Delta_n|_{\mathfrak{Z}}\}$ は表現たちの上のランダムウォークで, その推移作用素が

$$E_{\tau_\mu}\Delta : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \tag{4.2}$$

で与えられる....

これでいったい何がわかったのだろうか? (4.1) の $N_{\lambda\mu\nu}$と (4.2) の $E_{\tau_\mu}\Delta$ との間の具体的な関係式が得られなければ意味がない. 推移作用素から推移確率を導くには土台の集合の定義関数に作用させればよいが, 今の場合, $\mathfrak{Z}$ は表現たちの上の定義関数やデルタ関数に相当するものを含んでいない. $\mathfrak{Z}$ には '十分たくさんの' 元があるので, 原理的にはλからμに移る確率を (4.2) から引っ張り出せる. しかし, ここではもっと explicit に推移確率とΔとの関係を見るため, 大きなフォンノイマン代数の中で考えることにしよう.

複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のコンパクト実型 $\mathfrak{g}_0$と $\mathfrak{g}_0$をリー環にもつコンパクト群 G をとる. G の既約指標 $\{\chi_\lambda\}_{\lambda \in \hat{G}}$ を用いて, (4.1) を

$$\chi_\lambda \chi_\mu = \sum_\nu N_{\lambda\mu\nu}\chi_\nu \tag{4.3}$$

と書き直しておく. G の群フォンノイマン代数 $\mathcal{W}$(例 3.1) に値をとる量子ランダムウォークを $\mathcal{W}$の中心 $\mathcal{Z}$に制限して, 表現たち$\hat{G}$の上のランダムウォークを得たいわけである.

まず, 出てきてほしい推移確率の形を求めておこう. (4.3) をさらに

$$\frac{\chi_\lambda}{\dim\lambda}\frac{\chi_\mu}{\dim\mu} = \sum_{\nu \in \hat{G}} C_{\lambda\mu\nu}\frac{\chi_\nu}{\dim\nu}, \qquad C_{\lambda\mu\nu} = \frac{\dim\nu}{\dim\lambda\dim\nu}N_{\lambda\mu\nu} \tag{4.4}$$

と書き直す. $C_{\lambda\mu\nu}$ は次をみたす.

(4.5) $$C_{\lambda\mu\nu} \geq 0\ , \quad \sum_{\nu} C_{\lambda\mu\nu} = 1\ .$$

この $C_{\lambda\mu\nu}$ が, V_λに V_μをぶつけたときに V_νが現れる確率である. もう少し一般化して

(4.6) $$\bigoplus_{\mu\in S} p_\mu V_\mu \qquad (|S| < \infty,\, p_\mu > 0,\, \sum_{\mu\in S} p_\mu = 1)$$

というふうにぶつける方もランダムにしておく. このマルコフ連鎖の推移確率 Pと推移作用素 Tは

(4.7) $$P(\lambda,\nu) = \sum_{\mu\in S} C_{\lambda\mu\nu}$$

(4.8) $$Tf(\lambda) = \sum_{\kappa\in\hat{G}} f(\kappa)P(\lambda,\kappa)$$

で与えられる. (4.8) で $f = \delta_\nu$ とおくと, $T\delta_\nu(\lambda) = P(\lambda,\nu)$ を得る.

次の事実は, 最初[B1]によって $G = SU(2)$ の場合に示され, 後に[P]がコンパクト群に拡張した. [vW]も $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ で同じことをやっている. 他にも (文脈や言葉遣いは異なるが) 同様のことを考えた人が結構いるようである. 尚, 量子確率論とは関係なく $SU(2)^\wedge$ 上のランダムウォークとしてはすでに[GKR]で計算されている.

4.9. <u>定理</u> $L^2(G) = \bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathcal{H}_\lambda$ (Peter-Weyl) と分解して, 各成分への射影を $\pi_\lambda : L^2(G) \longrightarrow \mathcal{H}_\lambda$ で表す. $L^2(G)$ 上のトレース 1 の作用素$\rho = \sum_{\mu\in S} p_\mu(\dim\mu)^{-2}\pi_\mu$ と $\mathcal{W}$上の状態ρ_0 をとり, $\mathcal{W}\otimes(\mathcal{W}\otimes\mathcal{W}\otimes\cdots)$ 上の状態 $\rho_0\otimes\rho\otimes\rho\otimes\cdots$ を定める. $\mathcal{W}$の中心 $\mathcal{Z}$はπ_λを含み, この $\mathcal{W}$値ランダムウォーク $\{\Delta_n\}$ を $\mathcal{Z}$に制限すれば

(4.10) $$E_\rho \Delta\pi_\nu = T\pi_\nu\ , \qquad \nu\in\hat{G}$$

が成り立つ (Tは (4.8) の推移作用素).

(注) $\{\pi_\nu\}_{\nu\in\hat{G}}$ は $\mathcal{Z}$の中の互いに素な idempotents であるから, $\mathcal{Z}$を$\hat{G}$上の関数環とみなしたとき, π_νはデルタ関数δ_νと同一視できる. したがって, (4.10) のλにおける値が推移確率 $P(\lambda,\nu)$ を示す.

(証明) $L^2(G)=\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}}\mathcal{H}_\lambda$ が $\mathcal{W}$加群としての分解であるから, $\pi_\lambda\in\mathcal{Z}$ は明らかである. π_λが指標を用いて

$$\pi_\lambda=\dim\lambda\int_G\overline{\chi_\lambda(g)}L_g dg \tag{4.11}$$

と表示できることを示そう (L は G の左正則表現). (4.11) の右辺を A とおくと, $\forall\mu\in\hat{G}$ に対して $A\colon V_\mu\longrightarrow V_\mu$ であり, A は G の作用と可換だから, Schur の補題により, $A|_{V_\mu}=aI_{V_\mu}$ ($a\in\mathbb{C}$). 両辺のトレースをとって指標の直交関係を用いると, $\delta_{\lambda\mu}\dim\lambda=a\dim\mu$. したがって $A=\pi_\lambda$. (4.11) OK. 次に

$$E_\rho\Delta L_g=\sum_{\mu\in S}p_\mu\frac{\chi_\mu(g)}{\dim\mu}L_g \tag{4.12}$$

を示そう.

$$\begin{aligned}E_\rho\Delta L_g&=E_\rho(L_g\otimes L_g)=L_gE_\rho(1\otimes L_g)=(\operatorname{tr}\rho L_g)L_g\\&=\sum_{\mu\in S}p_\mu\frac{1}{(\dim\mu)^2}\operatorname{tr}(\pi_\mu L_g)=\sum_{\mu\in S}p_\mu\frac{\chi_\mu(g)}{\dim\mu}L_g\ , \qquad (4.12)\ OK.\end{aligned}$$

$$E_\rho\Delta\pi_\nu=\sum_\kappa\sum_{\mu\in S}p_\mu C_{\kappa\mu\nu}\pi_\kappa \tag{4.13}$$

を示そう. λの反傾表現をλ^*と書く. $\langle\chi_\lambda,\chi_\mu\chi_\nu\rangle=\langle\chi_\lambda\chi_{\mu^*},\chi_\nu\rangle$ の両辺を展開して $N_{\nu\mu\lambda}=N_{\mu\nu\lambda}=N_{\lambda\mu^*\nu}$ を得る. これと (4.3), (4.11), (4.12) より,

$$\begin{aligned}E_\rho\Delta\pi_\nu&=\dim\nu\int_G\overline{\chi_\nu(g)}E_\rho\Delta L_g dg=\sum_{\mu\in S}p_\mu\frac{\dim\nu}{\dim\mu}\int_G\overline{\chi_\nu(g)}\chi_\mu(g)L_g dg\\&=\sum_{\mu\in S}p_\mu\frac{\dim\nu}{\dim\mu}\int_G\overline{\chi_\nu(g)\chi_{\mu^*}(g)}L_g dg=\sum_{\mu\in S}p_\mu\frac{\dim\nu}{\dim\mu}\sum_\kappa N_{\nu\mu^*\kappa}\int_G\overline{\chi_\kappa(g)}L_g dg\\&=\sum_\kappa\sum_{\mu\in S}p_\mu\frac{\dim\nu}{\dim\kappa\dim\mu}N_{\nu\mu^*\kappa}\pi_\kappa=\sum_\kappa\sum_{\mu\in S}p_\mu C_{\kappa\mu\nu}\pi_\kappa\ , \qquad (4.13)\ OK.\end{aligned}$$

(4.7), (4.8) と (4.13) より, 求める式 (4.10) が得られた. (証明終)

このようにして, リー環の表現のテンソル積の既約分解の法則から生じるマルコフ連鎖を“ランダムウォーク”と呼ぶことの意味が明確になった.

References

[A] 阿部英一, “ホップ代数”, 岩波書店, 東京, (1977).

[B1] Ph. Biane, Marches de Bernoulli quantiques, In J. Azéma et al (Eds.) “Séminaire de probabilités XXIV 1988/89”, LNM 1426, Springer, Berlin Heidelberg New York, (1990), 329–344.

[B2] Ph. Biane, Quantum random walk on the dual of SU(n), Probab. Th. Rel. Fields 89, (1991), 117–129.

[GKR] Y. Guivarc'h, M. Keane, and B. Roynette, “Marches aléatoires sur les groupes de Lie”, LNM 624, Springer, Berlin Heidelberg New York, (1977).

[M] P.-A. Meyer, “Quantum probability for probabilists”, LNM 1538, Springer, Berlin Heidelberg New York, (1993).

[P1] K.R. Parthasarathy, A generalized Biane process, In J. Azéma et al (Eds.) “Séminaire de probabilités XXIV 1988/89”, LNM 1426, Springer, Berlin Heidelberg New York, (1990), 345–348.

[P2] K.R. Parthasarathy, “An introduction to quantum stochastic calculus”, Birkhäuser, Basel, (1992).

[vW] W. von Waldenfels, The Markov process of total spins, In J. Azéma et al (Eds.) “Séminaire de probabilités XXIV 1988/89”, LNM 1426, Springer, Berlin Heidelberg New York, (1990), 357–361.